Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά προσανατολισμού 2022-2023
Συμμετέχουν τα σχολεία:
2ο Περιστερίου - 14ο Περιστερίου - 2ο Πετρούπολης

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων βρίσκονται υποχρεωτικά πάνω στην ευθεία $y=x$.

β) Υπάρχει άρτια συνάρτηση που είναι 1-1.

γ) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ε) Αν δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους σε ένα διάστημα Δ, τότε η γραφική παράσταση της μίας είναι κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης στο Δ.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

μονάδες 5

Αν $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}$, με $x\geq 0$ και $g(x)=|x|$, τότε

Β3. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi(x)=(f^{-1}\circ g)(x)$.Στη συνέχεια να δείξετε ότι έχει ελάχιστο και να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα Fermat .

μονάδες 7

Β4. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της Cφ , του άξονα x΄x τις ευθείες x=0 και x=-1 είναι $E=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{2}{3}}dx$ και μετά να το υπολογίσετε.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, F αρχική της f στο $(0,+\infty)$, f(e)=0 και για $x>0$ ισχύει: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+2h)+4F(x-h)-5F(x)+2hf(x)}{4h^2}=\ln x$.

Γ1. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+2h)+4F(x-h)-5F(x)+2hf(x)}{4h^2}=f'(x)$, $x>0$.

μονάδες 7

Γ2. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=x\ln x-x$, $x>0$.

μονάδες 6

Γ3. Αν $0<\alpha<e$ τότε να δειχθεί ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ γραφικής παράστασης της f του άξονα x΄x και των ευθείων x=α και x=e είναι $E(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{3\alpha^2}{4}$.

μονάδες 5

Γ4. Αν $\alpha\in(0,e)$ τότε να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $E(\alpha)=\lambda$, $\lambda\geq 0$.

μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)+2f(-x)=3\text{συν}x+3x^2+\pi x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\text{συν}x+x^2-\pi x$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Δ2. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι η f έχει ένα ακριβώς ακρότατο.

Μονάδες 8

Δ3. α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\pi}{2}<x_1<\pi$, όπου x_1, η θέση του ακροτάτου.

β) Να δείξετε ότι $f(x_1)<0$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες και στη συνέχεια ότι είναι και οι δύο θετικές.

Μονάδες 4+2+5

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x)>-\pi x+1$ για κάθε $x\neq 0$.

Μονάδες 3

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Λύσεις

7

Θέμα Α

3 **Α1.** Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

3 Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

1 Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

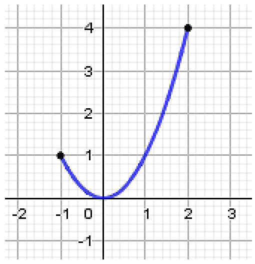
4

Α2. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=\mathbf{x_0}$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

1+3

Α3. α) Ψευδής

β) Στη συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in[-1,2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,2]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$ με $f'(x)=2x$, είναι $f'(0)=0$ όμως $f(-1)=1$, $f(2)=4$ δηλαδή $f(-1)\ne f(2)$.



Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ 5x2

Θέμα Β

7 **Β1.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}>0$ 2

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε είναι 1-1. 2

Η f ως συνεχής στο $[0,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=[0,+\infty)$ 3

5 **Β2.** Είναι $A_{f^{-1}}=f(A)=[0,+\infty)$ 2 οπότε με $x\ge 0$ και $y\ge 0$ θέτω $y=f(x)\Leftrightarrow y=x\sqrt{x}\Leftrightarrow y^2=x^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y^2}=x$. Συνεπώς $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}$, με $x\ge 0$. 3

7 **Β3.** Είναι Αφ={$x\in A_g$:$g(x)\in A_{f^{-1}}$ } 1 ={$x\in\mathbb{R}:|x|\ge 0$}=$\mathbb{R}$ και $\varphi(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 1 ,$x\in\mathbb{R}$. Προφανώς ισχύει ότι $\varphi(x)\ge 0=\varphi(0)$ για κάθε x πραγματικό οπότε η συνάρτηση φ έχει ελάχιστο για x=0 το f(0) = 0, 1

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$ οπότε η 2

φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα δεν ισχύει το θεώρημα Fermat. 2

6 **Β4.** Είναι $\varphi(x)\ge 0$ 1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και στο $[-1,0]$, οπότε το εμβαδόν είναι

$$E=\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{2}{3}}\,dx\ \left[-\frac{3(-x)^{\frac{5}{3}}}{5}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{5}\ \text{τ.μ.}$$

2 2 1

7

Θέμα Γ

έως εδώ 2

Γ1. Έχουμε: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+2h)+4F(x-h)-5F(x)+2hf(x)}{4h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

έως εδώ 2

$$\lim_{h\to 0}\frac{F'(x+2h)(x+2h)'+4F'(x-h)(x-h)'-5(F(x))'+(2hf(x))'}{(4h^2)'}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f(x+2h)-4f(x-h)-5\cdot 0+2f(x)}{8h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{2f(x+2h)-2f(x)}{8h}+\frac{-4f(x-h)+4f(x)}{8h}\right]=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+2h)-f(x)}{4h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{2h}\right]=\frac{f'(x)}{2}+\frac{f'(x)}{2}=f'(x) \text{ γιατί για το } \lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{4h}$$

1

Θέτουμε $y=2h \Leftrightarrow h=\dfrac{y}{2}$ οπότε $\lim\limits_{h\to 0}y=\lim\limits_{h\to 0}2h=0$, άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{4h}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f'(x)}{2} \text{ και για το } \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{2h}$$

1

έχουμε $u=-h \Leftrightarrow h=-u$ και $\lim\limits_{h\to 0}u=\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{2h}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}=-\frac{f'(x)}{2}$$ 1

6

Γ2. Από την υπόθεση για $x>0$ έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+4F(x-h)-5F(x)+2hf(x)}{4h^2}=\ln x\overset{\Gamma 1}{\Leftrightarrow}f'(x)=(x\ln x-x)'(1)$$ 1

γιατί $(x\ln x)'=\ln x+1\Leftrightarrow(x\ln x)'-1=\ln x\Leftrightarrow(x\ln x-x)'=\ln x$ 1

$(1)\overset{\substack{\text{Συνέπειες}\\ \text{ΘΜΤ}}}{\Leftrightarrow} f(x)=x\ln x-x+c,\ c\in\mathbb{R}.$ 3

Αλλά $f(e)=0\Leftrightarrow e\ln e-e+c=0\Leftrightarrow c=0$, οπότε: $f(x)=x\ln x-x$, $x>0.$ 1

5

Γ3. Αν $0<\alpha<e$ τότε $\alpha\le x\le e\Leftrightarrow\ln\alpha\le\ln x\le\ln e\Leftrightarrow\ln\alpha\le\ln x\le 1$ οπότε $\ln x-1\le 0\Rightarrow$

$x(\ln x-1)\le 0\Rightarrow f(x)\le 0$, $x\in[\alpha,e]$ 1

1

συνεπώς το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\alpha)=-\int_\alpha^e f(x)dx=-\int_\alpha^e x\ln x dx+\int_\alpha^e x dx=-\int_\alpha^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^e=$$ 1

$$-\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_\alpha^e+\int_\alpha^e\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx+\frac{e^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}=-\frac{e^2}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\int_\alpha^e x dx+\frac{e^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}=$$

$$\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^e-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{e^2}{4}-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{e^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{4}.$$ 2

7

Γ4. Έχουμε: $E(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{3\alpha^2}{4}$, $\alpha\in(0,e)$.

2

$$\lim_{\alpha\to 0^+}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{e^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{4}\right)=\frac{e^2}{4} \text{ γιατί } \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{3\alpha^2}{4}=0 \text{ και } \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha\right)\overset{0(-\infty)}{=}$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\ln\alpha}{\frac{2}{\alpha^2}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{-4}{\alpha^3}}=-\frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha^2=0.$$

Επίσης $\lim\limits_{\alpha\to e^-}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to e^-}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{e^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{4}\right)=\frac{e^2}{2}\ln e+\frac{e^2}{4}-\frac{3e^2}{4}=0$ 1

Για $\alpha\in(0,e)$ έχουμε $E'(\alpha)=\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{e^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{4}\right)'=\alpha\ln\alpha+\frac{1}{2}\alpha-\frac{3\alpha}{2}=\alpha\ln\alpha-\alpha=\alpha(\ln\alpha-1)\overset{\Gamma 3}{<}0$

άρα E ↘ στο $(0,e)$. 1

Η E είναι συνεχής στο $(0,e)$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$E((0,e))=\left(\lim\limits_{\alpha\to e^-}E(\alpha),\lim\limits_{\alpha\to 0^+}E(\alpha)\right)=\left(0,\frac{e^2}{4}\right)$ 1

- Αν $\lambda\in\{0\}\cup\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$ τότε η εξίσωση $E(\alpha)=\lambda$ δεν έχει λύση στο διάστημα $(0,e)$. 1
- Αν $\lambda\in\left(0,\frac{e^2}{4}\right)=E((0,e))$, τότε επειδή η E είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση $E(\alpha)=\lambda$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,e)$. 1

4

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x)+2f(-x)=3\sigma\upsilon\nu x+3x^2+\pi x$ (1).

θέτουμε στη σχέση (1) όπου x το $-x$ οπότε προκύπτει η σχέση

$f(-x)+2f(x)=3\sigma\upsilon\nu(-x)+3(-x)^2+\pi(-x)\Leftrightarrow$ 1

$f(-x)+2f(x)=3\sigma\upsilon\nu x+3x^2-\pi x\Leftrightarrow f(-x)=3\sigma\upsilon\nu x+3x^2-\pi x-2f(x)$ (2).

Από τη σχέση (1) μέσω της σχέσης (2) έχουμε $f(x)+2\left(3\sigma\upsilon\nu x+3x^2-\pi x-2f(x)\right)=3\sigma\upsilon\nu x+3x^2+\pi x\Leftrightarrow$

$f(x)+6\sigma\upsilon\nu x+6x^2-2\pi x-4f(x)=3\sigma\upsilon\nu x+3x^2+\pi x\Leftrightarrow -3f(x)=-3\sigma\upsilon\nu x-3x^2+3\pi x\Leftrightarrow$

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x+x^2-\pi x.$ 2

7

Δ2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με πρώτη παράγωγο $f'(x)=-\eta\mu x+2x-\pi$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-\sigma\upsilon\nu x+2>0$. 1

Άρα η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $f'(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού 1

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\eta\mu x+2x-\pi)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+2-\frac{\pi}{x}\right)=-\infty\cdot 2=-\infty$, 1

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\eta\mu x+2x-\pi)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+2-\frac{\pi}{x}\right)=+\infty\cdot 2=+\infty$. 1

1
($\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.)

Το $0\in f'(A)$ άρα υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$. 1

Για $x<x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και για $x>x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_1]$,γνησίως αύξουσα στο $[x_1,+\infty)$. 1

Έχει ελάχιστο στο x_1 το $f(x_1)=\sigma\upsilon\nu x_1+x_1^2-\pi x_1$,μοναδικό λόγω της μονοτονίας της f' . 1

4+2+5

Δ3. α) Η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f'(\pi)=(-1)\cdot\pi=-\pi<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. 2

Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την x_1 οπότε $\frac{\pi}{2}<x_1<\pi$. 1

Άρα για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(x_1)\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2}>f(x_1)\Leftrightarrow f(x_1)<-\frac{\pi^2}{4}$. 1

2ος τρόπος

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_1]$,άρα για $x=\frac{\pi}{2}<x_1$ είναι

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(x_1)\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2}>f(x_1)\Leftrightarrow-\frac{\pi^2}{4}>f(x_1)\ f(x_1)<-\frac{\pi^2}{4}$

β) Η f έχει ελάχιστο το $f(x_1)$ οπότε $f(x)>f(x_1)$ για κάθε $x\neq x_1$.

Άρα για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(x_1)\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2}>f(x_1)\Leftrightarrow f(x_1)<-\frac{\pi^2}{4}$.

Επομένως $f(x_1)<0$. 2

γ) Έχουμε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sigma\upsilon\nu x+x^2-\pi x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+1-\frac{\pi}{x}\right)=+\infty$. 1

1 (Είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{|x|^2}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$)

Έστω $A_1=(-\infty,x_1)$, $A_2=[x_1,+\infty)$ τότε :

$f(A_1)\overset{f\searrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}}\left(\lim\limits_{x\to x_1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(f(x_1),+\infty\right)$ και

$f(A_2)\overset{f\nearrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}}\left[f(x_1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[f(x_1),+\infty\right)$ με $f(x_1)<0$. 1

Το $0\in f(A_1),f(A_2)$ άρα υπάρχουν $x_2\in A_1,x_3\in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_2)=f(x_3)=0$. 1

Τα x_2,x_3 μοναδικά αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty,x_1],[x_1,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,x_1]$, $f(0)\cdot f(x_1)=1\cdot f(x_1)=f(x_1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,x_1)$.

Όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο A_1 την x_2 οπότε $x_2>0$.

3 Επίσης $x_3>x_1>0$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. 1

Δ4. Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 0.

Η (ε) έχει εξίσωση : $y-f(0)=f'(0)\cdot x\Leftrightarrow y=-\pi\cdot x+1$. 1

Η f είναι κυρτή άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής, οπότε $f(x)>-\pi x+1$. 2